PDV, 27 mei 2002
Toets

(1 punt vooraf)

1. Los het volgende Cauchy probleem op:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$
$$u(x,1) = x.$$

(2 punten)

2. Los de volgende vergelijking formeel op:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ u(x,0) &= \phi(x); \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0 \\ u_t(x,0) &= 0; \\ u_x(0,t) &= 0; \\ u_x(\pi,t) &= 0. \end{aligned}$$

(2 punten)

3. Beschouw de niet-homogene warmte-geleidingsvergelijking:

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(\pi - x); \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

(a) Laat zien dat de vergelijking kan worden gereduceerd tot een homogene warmtegeleidingsvergelijking. Hint: substitueer $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$.

(b) Bepaal $w(x)$, de steady state oplossing van $(*)$, met andere woorden, bepaal $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

(3 punten)

4. Gegeven $u_{tt} = u_{xx}$; $0 \le x \le L$, $t \ge 0$;

$$\begin{aligned} &u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x); && 0 \le x \le L; \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0; && t \ge 0. \end{aligned}$$

Laat $E(t) = \displaystyle\int_0^L (u_t^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x$. Neem aan dat er een oplossing u bestaat.

(a) Laat zien dat E constant is.

(b) Laat zien dat u uniek wordt bepaald.

(2 punten)